

# Le don d'ubiquité d'une suite binaire : Prouhet-Thue-Morse

J.-P. Allouche

CNRS, Math., Équipe Combinatoire et Optimisation

Université Pierre et Marie Curie, Case 189

4 Place Jussieu

F-75252 Paris Cedex 05

France

<http://www.math.jussieu.fr/~allouche>

Nous proposons une promenade autour des apparitions multiples d'une suite binaire (qui prendra les valeurs 0 et 1 ou bien + et −) dans différents domaines des mathématiques. Nous terminerons par des allusions à des propriétés physiques ou “musicales” de cette suite et de suites “sœurs”.

En guise de hors-d'œuvre, on pourra contempler la suite de nombres rationnels

$$\frac{1}{2} \quad \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} \quad \frac{\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}}{\frac{5}{6}} \quad \dots$$

et se demander si elle tend vers une limite “simple à écrire”. On pourra ensuite se demander quel est le signe, lorsque la variable  $x$  varie entre 0 et  $\pi$  de la fonction  $\sin x$ , puis  $\sin x \sin 2x$ , puis  $\sin x \sin 2x \sin 4x$ , puis... On essaiera alors de trouver dans la suite

0 1 1 0 1 0 0 1 1 0 0 1 0 1 1 0 ...

des répétitions de trois blocs consécutifs identiques (ou plutôt de montrer qu'il n'y en a pas).

On indiquera ensuite des liens inattendus avec les tours de Hanoï, le jeu d'échecs, la suite d'entiers

0 1 3 4 5 7 9 11 12 13 15 16 17 19,

les bases de numération non entières, l'itération de fonctions continues...