Jeux de mots, les réponses

17 octobre 2011

Question 1

On se donne la règle $ab = ba$*. Montrer que* $aababba = aaaabbb$*. Montrer que* $aaba$ *n'est pas égal à* $bbab$*.*

On part de $aababba$. Le principe est de pousser les b vers la droite et les a vers la gauche : en appliquant la règle, on obtient successivement

$$aaabbba, aaabbab, aaababb, aaaabbb.$$

Ce qui montre l'égalité.

Lorsqu'on remplace ab par ba (ou réciproquement), le nombre de a et de b du mot est conservé. Les notes $aaba$ et $bbab$ ne contiennent pas le même nombre de a, ils ne sont donc pas égaux.

Finalement, ici, les choses sont simples : deux mots sont égaux si et seulement si ils contiennent le même nombre de a et le même nombre de b.

Question 2

On se donne les règles suivantes : $ac = ca$ *et* $aba = bab$ *et* $bcb = cbc$*. Pouvez-vous dire si* $abacaba$ *est égal à* $bcbabcb$ *avec ces règles ?*

Hum, pas si facile, on a vite fait de tourner en rond... Voici un calcul qui marche, où on a essayé de garder la symétrie du mot.

$$\begin{aligned} abacaba &= babcbab \quad \text{(règle 2, deux fois)} \\ &= bacbcab \quad \text{(règle 3)} \\ &= bcabacb \quad \text{(règle 1, deux fois)} \\ &= bcbabcb \quad \text{(règle 2).} \end{aligned}$$

Pouvez-vous dire si $accaaccabbc$ *est égal à* $cabbc$ *avec ces règles ?*

Ben non ! Le premier l'est trop long ! ! Le deuxième l'est trop court ! ! !

Plus précisément : chacune des trois règles conserve le nombre de lettres d'un mot. Par conséquent deux mots égaux ont le même nombre de lettres. Ces deux mots sont donc différents.

Remarquons que les choses sont bien plus compliquées qu'à la question précédente. Le nombre de lettres ne suffit pas à caractériser les mots égaux ; par exemple, on pourrait montrer que les mots a et b sont différents...

Ces règles étranges viennent en fait du "groupe des tresses" : voir par exemple cet article de vulgarisation sur les tresses.

Question 3

Est-ce que l'anti-mot de abcbac est ABCBAC ?

Non, puisque si on colle les deux, on obtient le long mot $abcbacABCBAC$, et on ne voit pas comment on pourrait le simplifier pour obtenir le mot vide. Bon, notez que "on ne voit pas" est un peu court, il faudrait un peu plus de place pour démontrer proprement que ce mot n'est pas égal au mot vide.

En tout cas, on peut facilement trouver un anti-mot pour $abcbac$, il s'agit de $CABCBA$: on écrit les anti-lettres du mot dans l'ordre inverse. En effet, on a bien

$$abcbacCABCBA = abcbaABCBA = abcbBCBA = abcCBA = abBA = aA = 0.$$

Question 4

Les règles sont $a = A$, $b = B$, $ab = ba$. Dans ce jeu, il n'y a qu'un nombre fini de mots différents. Pouvez-vous dire combien ?

En essayant un peu, on se rend compte que les mots un peu trop long peuvent tous se faire raccourcir... Au final, on se retrouve avec les mots 0, a, b et ab. Montrons ceci : tout mot est égal à l'un de ces quatre mots. Pas si facile, puisqu'il faut trouver un raisonnement qui prennent en compte tous les mots possibles !

Commençons par considérer les mots de deux lettres. Puisque $a = A$ et $b = B$, il est clair que tout mot est égal à un mot qui ne contient que des minuscules. D'autres part on a $aa = aA = 0 = bb$, et $ab = ba$. Donc tous les mots de deux lettres sont égaux à 0 ou à ab.

Si on a un mot de trois lettres, à nouveau on peut l'écrire avec seulement des minuscules. S'il contient aa ou bb il est égal à un mot de une lettre. Sinon, il ne contient aucune répétition, il n'y a que deux possibilités : aba ou bab. Mais on a $aba = aab = b$ et de même $bab = a$. Ainsi, tous les mots de trois lettres sont égaux à un mot d'une seule lettre.

Si on part d'un mot de plus de trois lettres, on va toujours pouvoir réduire sa longueur en choisissant une séquence de trois lettres et en la réduisant à une lettre. De proche en proche, on réduit la longueur jusqu'à obtenir un mot de zéro, une ou deux lettres. Ceci termine le raisonnement.

Il reste encore une chose à voir : comment peut-on être sûr que les quatre mots 0, a, b et ab sont tous différents ?

Comme dans les questions précédentes, il faut trouver un "invariant", quelque chose qui ne change pas lorsqu'on applique les règles... Moins facile, n'est-ce pas ? Les règles consistent à supprimer deux a, ou deux b, ou à permuter un a et un b. Mais c'est bien sûr : la *parité* du nombre de a ou de b ne peut pas changer. Ainsi, par exemple, a n'est pas égal à ab avec ces règles, puisque le premier contient 0 occurrence de la lettre b, alors que le second en contient une...

Question 5

Quelles sont les transformations qu'on peut faire subir à la feuille sans qu'elle change globalement d'emplacement ?

On peut la retourner en inversant la droite et la gauche, comme suggéré par l'énoncé. On peut la retourner en inversant le haut et le bas. Ces deux opérations échangent le recto et le verso. On peut la faire pivoter d'un demi-tour en la faisant glisser sur la table, ce qui ne change pas le recto et le verso. Ce qui fait trois transformations, et même quatre si on tient compte de la transformation qui ne fait rien.

En appelant a la première et b la deuxième, on s'aperçoit que la troisième correspond à ab ou à ba. Si on retourne deux fois de suite la feuille de la même façon, ceci revient à ne rien faire, ce qui correspond aux règles $aa = 0$ et $bb = 0$, ou encore $a = A$ et $b = B$.

Question 6

Le carré a plus de symétries que le rectangle, il faut donc ajouter, par exemple, la lettre c qui va désigner la rotation d'un quart de tour. Je vous laisse trouver toutes les règles de ce dernier groupe...