Stand Fête de la Science: Crème Catalane

Contents

1 Questions/Réponses Jaunes **2**
1.1 Soustraction 2
1.2 Triangulations 3

2 Questions/Réponses Oranges **5**
2.1 Parenthésages et arbres 5
2.2 Triangulations 6

3 Questions/Réponses Bleues **8**
3.1 Parenthésages et arbres 8
3.2 Triangulations 9
3.3 Parenthèses, arbres, triangulations, nombres de Catalan 10

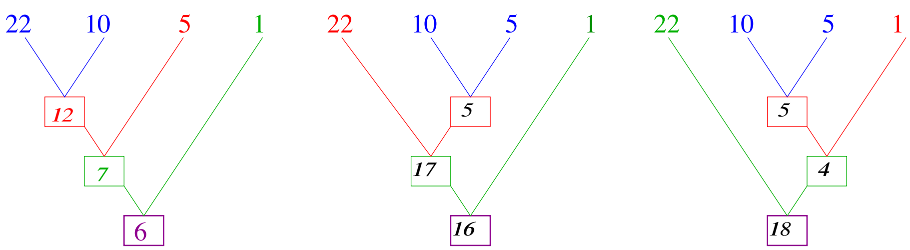
1 Questions/Réponses Jaunes

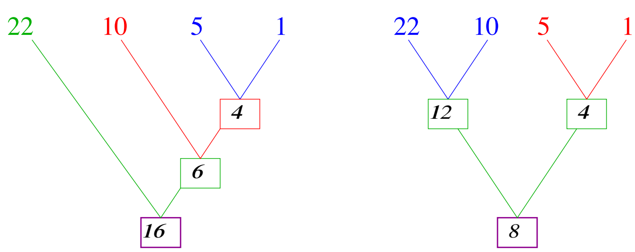
1.1 Soustraction

De la même manière qu'une virgule peut changer le sens d'une phrase, des parenthèses peuvent changer le résultat d'un calcul. Par exemple, $(22 - 10) - 5 = 7$ alors que $22 - (10 - 5) = 17$.

On propose d'effectuer le calcul $22 - 10 - 5 - 1$ en laissant les nombres dans cet ordre mais en effectuant les opérations dans des ordres différents. On utilise des arbres pour visualiser l'ordre des calculs.

Effectuer les opérations suivantes d'après le modèle:





Combien de résultats différents obtenez-vous? Essayer avec d'autres nombres au départ, à la place de 22,10,5,1.

On obtient 4 résultats différents! Deux arbres donnent le même résultat: 16!

Ceci n'est pas un hasard! Si on essaye avec d'autres nombres au départ les résultats des deux arbres sont toujours les mêmes (voir question orange pour plus d'explications).

1.2 Triangulations

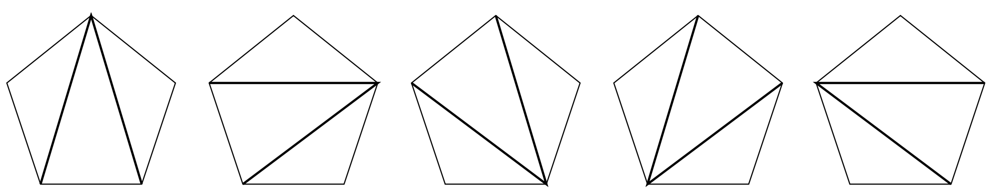
Questions:
Dans un polygone, on appelle diagonale tout segment joignant deux sommets non consécutifs.

1. Tracer dans un pentagone le plus de diagonales possibles qui ne se coupent pas. Combien de configurations différentes obtenez-vous? Combien y a-t-il de diagonales dans chaque configuration?

2. Même question avec un hexagone.

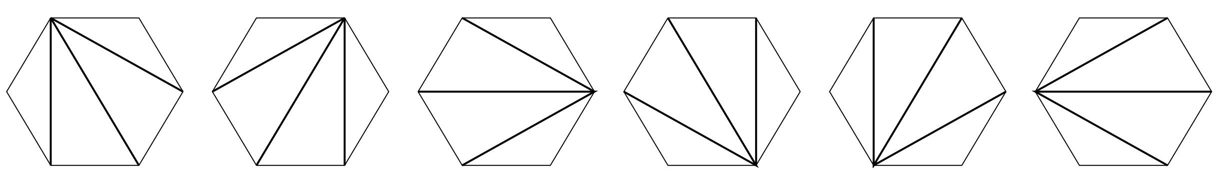
3. Pourquoi appelle-t-on ça une triangulation?

Réponses:
On obtient 5 configurations possibles pour le pentagone (toujours la même, qu'on tourne!). Elles contiennent toutes 2 diagonales.

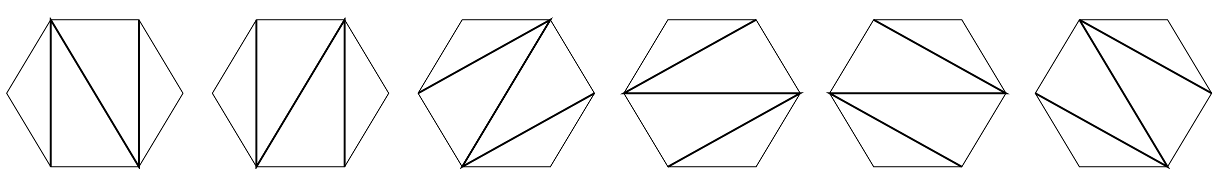


.

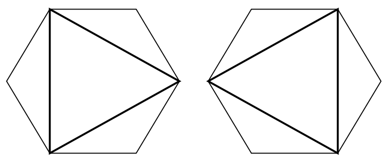
Pour les hexagones, on obtient au total 14 configurations, contenant toutes 3 diagonales. Ces configurations se classent en trois familles: les 6 *pattes d'oie*:



les 6 *zig-zags*,



et 2 *triangles intérieurs*,



Toutes ces configurations découpent les polygones en triangles, c'est pour cela qu'on les appelle des *triangulations*.

2 Questions/Réponses Oranges

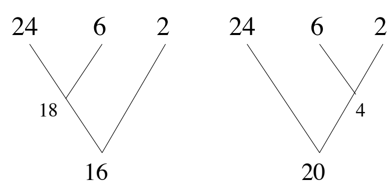
2.1 Parenthésages et arbres

Questions

De la même manière qu'une virgule peut changer le sens d'une phrase, des parenthèses peuvent changer le résultat d'un calcul. Par exemple, avec la soustraction et les nombres $24, 6, 2$ donnés dans cet ordre, si on effectue $24 - (6 - 2)$ ou $(24 - 6) - 2$, on n'obtient pas le même résultat.

1. Donner des exemples d'opérations usuelles $*$ pour lesquelles l'égalité $(a * b) * c = a * (b * c)$ est toujours satisfaite, et des exemples pour lesquels l'égalité n'est pas satisfaite en général.

Quand il s'agit de faire des opérations avec 3 nombres a, b, c donnés dans cet ordre, il n'y a que deux possibilités d'effectuer le calcul: $(a * b) * c$ ou $a * (b * c)$. Avec $4, 5, 6, \ldots$ nombres les possibilités deviennent de plus en plus grandes. Pour visualiser le calcul, on utilise des arbres. La figure suivante représente les calculs $(24 - 6) - 2$ et $24 - (6 - 2)$:

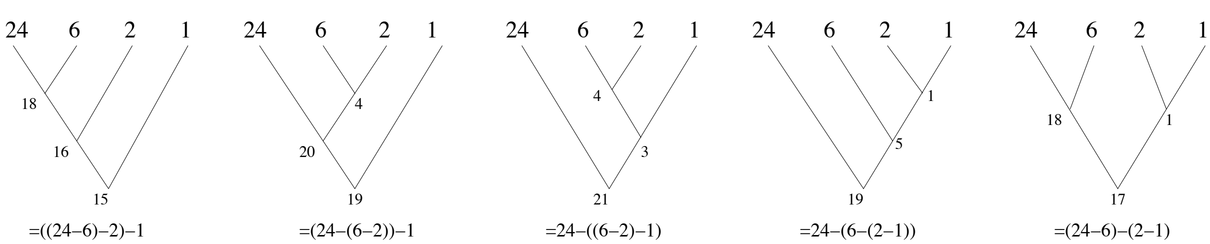


2. Trouver toutes les possibilités de calculs pour $24 - 6 - 2 - 1$, en les associant à des arbres.

3. Combien de résultats différents obtenez-vous? Pouvez vous l'expliquer?

Réponses:

1. Pour l'addition et la multiplication, on a toujours $(a+b)+c = a+(b+c)$ et $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$. On dit que ces opérations sont *associatives*. En revanche ce n'est plus le cas pour la soustraction et la division. Par exemple, pour la soustraction $24 - (6 - 2) = 20$ alors que $(24 - 6) - 2 = 16$, et pour la division $(24 \div 6) \div 2 = 2$ alors que $24 \div (6 \div 2) = 8$.
2. Il y a 5 possibilités de parenthésages/arbres :



3. Les arbres numero 2 et 4 ci-dessus donnent le même résultat, bien que les schemas de calculs soient différents. Ceci n'est pas un hasard, on peut s'en convaincre en utilisant d'autres nombres au départ. Ceci s'explique algébriquement en utilisant les règles de calculs concernant le signe $-$ devant une parenthèse. L'arbre numero 2 symbolise l'opération $(a-(b-c))-d$, le numero 4 l'opération $a-(b-(c-d))$. En développant, on obtient:

$$\begin{aligned}(a-(b-c))-d &= (a-b+c)-d \\ &= a-b+c-d\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}a-(b-(c-d)) &= a-(b-c+d) \\ &= a-b+c-d\end{aligned}$$

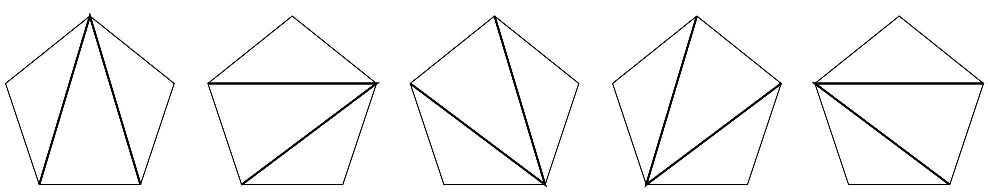
2.2 Triangulations

Questions
Dans un polygone convexe, on appelle diagonale tout segment joignant deux sommets non consécutifs. Une triangulation d'un polygone est un découpage du polygone avec le plus de diagonales possibles qui ne s'intersectent pas.

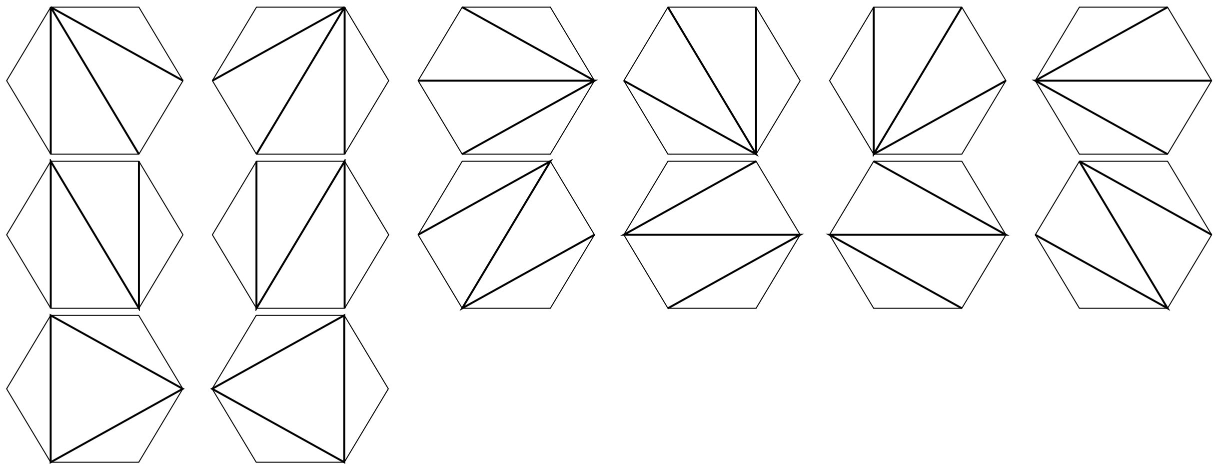
1. Donner une triangulation d'un pentagone. Est-ce la seule possible? Combien de configurations obtenez-vous? Même question avec un hexagone.

2. Combien y a-t-il de diagonales dans chaque configuration? Combien de triangles?

Réponses:
On obtient 5 configurations possibles pour le pentagone (toujours la même, qu'on tourne!). Elles contiennent toutes 2 diagonales.



Pour les hexagones, on obtient au total 14 configurations, contenant toutes 3 diagonales. Ces configurations se classent en trois familles, les 6 *pattes d'oie*, les 6 *zig-zags*, et 2 *triangles intérieurs*:



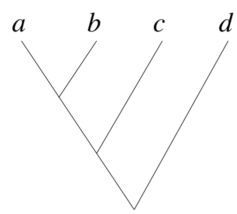
Toutes ces configurations découpent les polygones en triangles, c'est pour cela qu'on les appelle des *triangulations*.

3 Questions/Réponses Bleues

3.1 Parenthésages et arbres

Questions

De la même manière qu'une virgule peut changer le sens d'une phrase, des parenthèses peuvent changer le résultat d'un calcul. Pour certaines opérations connues, les calculs $(a * b) * c$ et $a * (b * c)$ ne donnent pas le même résultat. On code les calculs à l'aide d'*arbres*. Par exemple le calcul $((a * b) * c) * d$ est codé par:



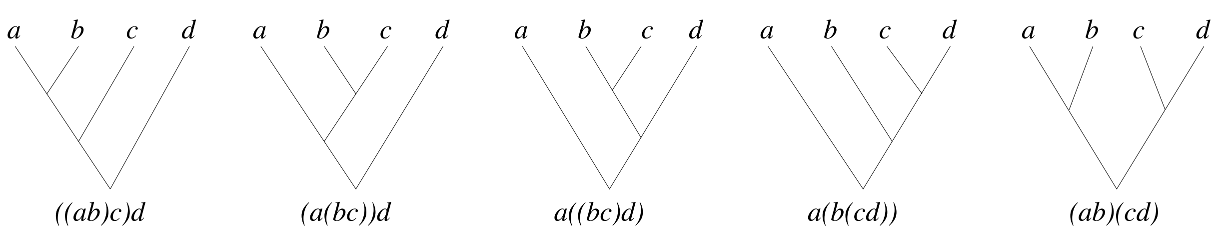
1. Donner un exemple d'opération $*$ pour laquelle $(a * b) * c \neq a * (b * c)$

2. Faire la liste de tous les parenthésages possibles avec quatre nombres donnés dans l'ordre $a * b * c * d$ et dessiner l'arbre associé.

3. Combien de paires de parenthèses avez-vous utilisé autour de $a * b * c * d$? Combien en faudra-t-il autour de $a * b * c * d * e$? de n nombres $a_1 * a_2 * \cdots * a_n$?

Réponses:

1. Pour l'addition et la multiplication, on a toujours $(a + b) + c = a + (b + c)$ et $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$. On dit que ces opérations sont *associatives*. En revanche ce n'est plus le cas pour la soustraction et la division. Par exemple, pour la soustraction $24 - (6 - 2) = 20$ alors que $(24 - 6) - 2 = 16$, et pour la division $(24 \div 6) \div 2 = 2$ alors que $24 \div (6 \div 2) = 8$. 2. Il y a 5 possibilités de parenthésages/arbres :



3. Le parenthésage autour de 4 nombres nécessite 2 paires de parentèses, autour de 5 nombres 3 paires, ..., autour de n nombres $n - 2$.

3.2 Triangulations

Questions

Dans un polygone convexe, on appelle diagonale tout segment joignant deux sommets non consécutifs. Une triangulation d'un polygone est un découpage du polygone avec le plus de diagonales possibles qui ne s'intersectent pas.

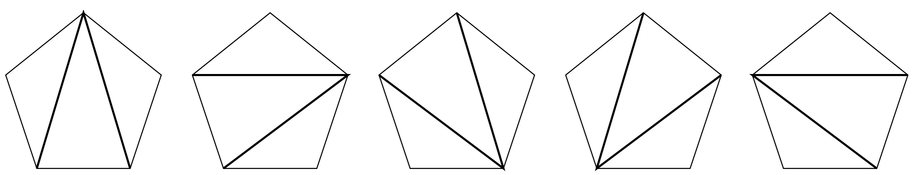
1. Donner une triangulation d'un pentagone. Est-ce la seule possible? Combien de configurations obtenez-vous? Même question avec un hexagone.

2. Combien de diagonales faut-il pour trianguler un polygone à n cotés.

3. Partant d'une triangulation, si on enlève une diagonale au hasard, combien de nouvelle(s) configuration(s) peut-on construire?

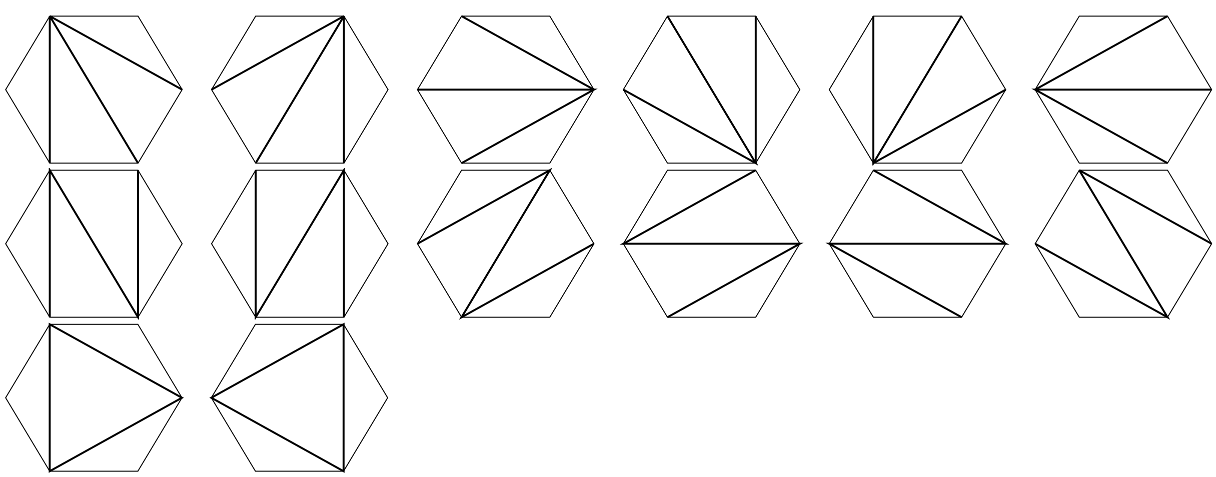
Réponses:

1. On obtient 5 configurations possibles pour le pentagone (toujours la même, qu'on tourne!). Elles contiennent toutes 2 diagonales. Pour les hexagones, on obtient au total

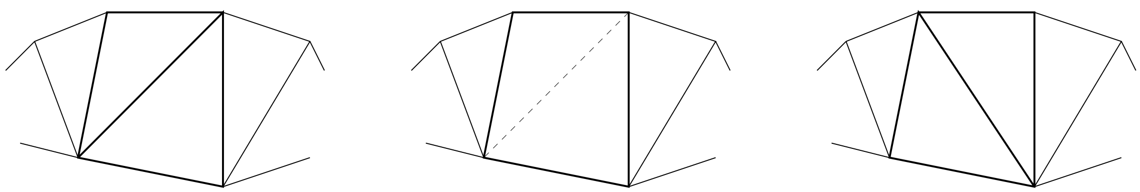


.

14 configurations, contenant toutes 3 diagonales. Ces configurations se classent en trois familles, les 6 *pattes d'oie*, les 6 *zig-zags*, et 2 *triangles intérieurs*:

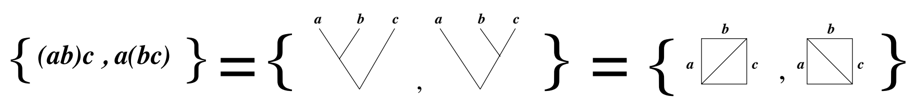


2. On peut trianguler tout polynôme à n côtés en utilisant une configuration *patte d'oie* (ça peut faire beaucoup d'orteils pour une seule patte ...). C'est à dire qu'on sélectionne un sommet, et on trace toutes les diagonales partant de ce sommet. Il y en a alors $n-3$ (on relie tous les sommets sauf celui de départ et ses deux voisins). En fait on peut montrer (par exemple par récurrence) que toute triangulation (pas nécéssairement pattes d'oie) contient $n-3$ diagonales.
3. Si on enlève une diagonale, on forme "localement" un quadrilatère. La seule façon d'obtenir alors une nouvelle triangulation est d'utiliser l'autre diagonale du quadrilatère.



3.3 Parenthèses, arbres, triangulations, nombres de Catalan

Il est connu que l'ensemble des parenthésages autour de n nombres, l'ensemble des arbres à n feuilles et l'ensemble des triangulations d'un polygone à $n+1$ cotés peuvent s'identifier.



Le nombre d'éléments dans un de ces ensembles est appelé $(n-1)$-ième nombre de Catalan et noté K_{n-1}. Il est donné par une formule explicite faisant intervenir un coefficient binomial:

$$K_{n-1} = \frac{1}{n+1} C_{2n}^{n}.$$

Les mathématiciens ont décrit 193 ensembles différents de cardinal K_{n-1}. Certaines propriétés s'interprètent plus facilement dans un ensemble plutôt qu'un autre.

Expliquer pourquoi dans un parenthésage autour de n nombres si on enlève une paire de parenthèses, il n'y a qu'une seule façon de la mettre ailleurs.

C'est une question difficile si on la formule en termes de parenthésage. En utilisant la correspondance ci-dessus, cette question se traduit en terme de diagonales dans une triangulation. C'est la même question que la question 3 au paragraphe 3.2 !